

大学数学教学应重视学生四种能力的培养

魏连鑫

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 数学教育在大学生基本素质培养方面发挥着不可替代的作用, 教师在教学过程中不仅要做好数学知识的传授, 而且应该注重学生综合能力和素质的培养。数学具有鲜明的学科特点, 需要独特的学习方法, 教师应充分利用这些特点, 在大学数学教学中重视学生抽象思维和逻辑推理、分析问题和解决问题、自主学习、归纳总结和推广四种能力的培养, 为学生未来的发展打下坚实的基础。

关键词: 大学数学教学; 能力培养; 抽象思维; 逻辑推理; 归纳总结和推广

中图分类号: G 642 **文献标志码:** A **文章编号:** 1009-895X(2021)01-0081-04

DOI: 10.13256/j.cnki.jusst.sse.2021.01.014

Emphasizing Cultivation of Four Abilities in College Mathematics Teaching

WEI Lianxin

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Mathematics education plays an irreplaceable role in the cultivation of College Students' basic quality. Teachers should not only impart mathematics knowledge, but also pay attention to the cultivation of students' comprehensive ability and quality in the teaching process. Mathematics has distinct disciplinary characteristics and unique learning methods. Teachers should make use of these characteristics and emphasize students' abstract thinking and logical reasoning, analysis and solution of problems, independent learning, induction, summary and deduction in college mathematics teaching. The cultivation of the four abilities lays a solid foundation for the future development of students.

Keywords: college mathematics teaching; cultivation of ability; abstract thinking; logical reasoning; summary and deduction

数学是高等学校理工经管等专业重要的学科基础课, 具有学分高、学习周期长、学习难度大等显著特点。大学数学系列课程学习的效果对学生后续相关专业课程的学习及数学素质和能力的培养起决定作用, 关系到学生未来能否运用数学工具从事科学研究, 能否运用数学的思维方式解决工作中遇到

的实际问题。作者认为教师在大学数学教学过程中, 不仅要做好数学知识的传授, 更应该注重学生综合能力和素质的培养。近年来, 围绕大学数学教学方法和内容的改革如火如荼, 其核心就是要改变传统课堂上偏重于单向的知识传授, 重知识点和解题技巧, 而忽视学生综合能力和素质培养的教学方

收稿日期: 2020-03-25

基金项目: 上海理工大学 2020 年度教师教学发展研究项目 (CFTD203050)

作者简介: 魏连鑫 (1977-), 男, 讲师。研究方向: 计算数学, 数学教学。E-mail: weilianxin@usst.edu.cn

法和教学理念^[1-3]。根据多年的教学实践,作者总结出在“高等数学”“线性代数”和“概率论与数理统计”等大学数学课程教学中,教师应注重学生四种能力的培养,并举例说明为达到培养目标应采取的具体教学方法。

一、抽象思维和逻辑推理能力

高度的抽象性和严密的逻辑性是数学课程的显著特点。与初等数学相比,这些特点在大学数学课程中表现得更加突出。对于刚刚踏入大学校门,初次接触高等数学和线性代数课程的大一新生来说,学习中难免会遇到困难,若没有经过教师积极良好的引导,久而久之,学生会养成死记硬背、不求甚解等错误的学习习惯,甚至对自己丧失信心,对学习产生消极和抵触的心理,这样既不能很好地达成传授知识的目的,更无法实现培养能力的效果。

抽象思维和逻辑推理能力是学生今后从事更高层次科学研究的重要基础,也是现代大学生应该具备的基本数学素养。将直观具体的事物或现象提升为一般抽象的普遍规律,再将其应用于具体问题,是人类认识世界和改造世界的重要手段,而严密的逻辑推理也是学生正确分析问题和解决问题的重要保证。教师应该充分利用数学课程的特点,培养好学生的这种能力。

在教学过程中,教师应做到循序渐进,启发引导。比如在讲解基本概念和重要定理时,借助直观的几何图形和物理现象是非常必要的,这不仅对学生理解概念和定理的论证有所帮助,也是培养学生洞察问题本质,提升抽象能力的重要手段。以拉格朗日微分中值定理的讲解^[4]为例,可以首先画出其几何图形,然后引导学生观察,根据学过的知识将图形用数学公式表达为:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

在对定理的证明过程中,关键是引入辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

这样的讲解方式可以让学生清楚地看出,数学家是如何根据客观实践逐渐抽象出定理内容的,而这种抽象又是定理证明不可缺少的。

再比如极限概念的讲授,更是培养学生抽象思维和逻辑推理能力的好机会。虽然学生在中学学习过极限,但只是一种描述性定义,谈不上高度的抽

象和严谨的证明。大学数学教师应该首先告诉学生,极限是从常量到变量研究的重要工具,缺少极限工具就无法发展出高等数学,它是连接导数、积分和级数等重要概念的纽带。这样可以让学生初步认识到极限概念在高等数学中的重要地位,引起学生的重视。其次,可以鼓励学生尝试按自己的理解来描述极限,并引导他们体会只有用严谨的数学语言才能深刻准确地刻画变量之间的内在联系,从而引入 ε, N, δ 符号,而“任给 $\varepsilon>0$,只要 $n>N$ ($0<|x-x_0|<\delta$),就有 $|a_n-a|<\varepsilon$ ($|f(x)-A|<\varepsilon$)成立”这样的数学语言也变得不再那么晦涩难懂。由于极限概念的高度抽象性,加之运用概念证明极限又是一个严谨的逻辑推理过程,有部分学生理解困难也是正常现象。教师应及时根据学生学习情况加以鼓励和引导,还可以利用习题课讨论、课外辅导和布置思考题等方式逐步加深学生的理解,这正是提高学生抽象思维和逻辑推理能力的过程。此外,对于成绩较优的学生,可以鼓励其通过参加数学竞赛来进一步提高自己。

二、分析问题和解决问题的能力

大学数学课程的教学目的是要让学生在掌握数学知识的同时,学会用数学方法去分析和实际问题。数学从实际中来,又要返回到实际中去。离开实际问题单纯讲授数学知识,不但无法调动学生的学习积极性,更谈不上提高学生的能力。这就要求教师跳出教材的限制,在传授知识的同时,讲清知识的来龙去脉,带领学生重走发现之路,引导学生站在数学家的角度去思考问题。比如在利用极限讲授导数和积分的概念时,要讲清其本质是促进变与不变、近似与精确的相互转化。学生领悟到这一点,就不难运用极限思想去解决瞬时速度和曲边梯形面积等问题。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均速度 $\Delta s/\Delta t$ 的极限即为该时刻的瞬时速度。当分割的细度 $\lambda \rightarrow 0$ 时,曲边梯形面积的近似值 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 的极限即为曲边梯形的精确面积。

再比如概率论中对正态分布的讲解^[5],可以从高斯对测量误差的研究引入,结合学生的专业特点,通过分析各种误差或偏差的产生来说明正态分布的特点,指出如果一个随机变量受到大量相互独立的随机因素共同影响,而每个因素在总影响中所起的作用均不大,则这种随机变量往往服从或近似服从正态分布。而对正态分布更深一层的理解,则

放在中心极限定理的讨论中。这就为学生揭示出正态分布产生的源泉，使学生认识到正态分布在生产生活中是极为常见的，很多自然群体的经验频率均呈现出钟形曲线。通过理解这些，最终达到让学生正确分析问题并利用正态分布解决实际问题的目的。

此外，鼓励和引导学生参加数学建模竞赛也是一种培养分析问题和解决问题能力的重要方式^[6-8]。在课堂教学中，从实际问题引出抽象的数学理论，让学生充分了解数学概念、理论和方法产生的渊源和发展的过程。而数学建模则需要学生运用数学知识去解决现实世界中各领域的复杂问题，这就形成了从具体到抽象、再到具体，从问题到知识、再到问题的完整培养过程，有效地提高了学生分析问题和解决问题的能力。

三、自主学习能力

自主学习能力是学生持续进步和提高自身能力的重要素质，直接影响到学生今后的独立工作和未来发展。从中学教育到大学教育过渡的重要环节就是培养学生从被动学习变为主动学习，从课堂学习扩展到课后自学。教师的任务不仅是教会学生知识，更重要的是教会学生如何学习知识。学生在大学学习到的知识可能会过时无用，但在大学中培养起来的如何学习知识的能力却是终身受用的。随着大学教学的深入，教师在课堂上更多起到的是引导和示范作用，在将基本概念、课程定位、主要内容和学习方法等传递给学生以后，应该积极引导學生进行独立拓展学习。

教师可在教学中适当布置一些任务或思考题，由浅入深，引导学生课后通过阅读书籍和文献自主完成，逐步提高学习积极性，培养自主学习和解决问题的能力。比如在线性代数的教学中，学生很难理解行列式和线性变换这样抽象的概念。可以启发学生思考其与空间解析几何的联系，并自主查阅文献和参考书来说明行列式和线性变换的几何意义。再比如学生往往对线性代数中复杂的运算望而生畏，对于自己的计算结果没有把握。可以鼓励学生课后自学 Excel、Mathematic 等软件的使用^[9]，在独立完成作业后借助这些软件来检查自己的计算结果是否正确。这样既提高了学生的学习积极性和自觉性，又锻炼了其自主学习能力。

另外，参加数学竞赛和数学建模竞赛是培养学生自主学习能力的有效手段。在准备竞赛的过程中，学生需要学习大量必修课程以外的数学知识。在学习了高等数学、线性代数、概率论与数理统计等课程的基础上，学生通过旁听、课下自学、小组讨论等多种形式进行自主学习，教师则以开展课外主题讲座和分组指导等形式辅助学习。在此过程中，学生学习到优化、科学计算、数据分析和微分方程等数学知识以及这些知识可以解决什么样的实际问题。这极大地拓宽了学生的视野，让学生认识到课堂是有限的，更多的知识等待他们自己去探索 and 发现，提高学习积极性的同时，又锻炼了自主钻研和学习的能力。

四、归纳总结和推广能力

归纳总结，由个别到一般，是学习数学的重要方法，也是学生在未来的学习和工作中应该具备的一种能力，教师应在数学教学中重视学生这方面能力的培养。在教学中，教师应在每一章节结束后做出小结，对不同知识点之间的联系也要帮助学生进行归纳总结。线性代数具有概念和定理繁多且高度抽象的特点，不同章节的概念和定理往往存在紧密的联系，但不易被学生发现。教学中应注意引导学生进行归纳和比较。比如向量组的极大无关组、齐次方程组的基础解系、向量空间的基这三个重要概念，虽然出现在不同章节，但它们却具有相同的本质，即：1) 线性无关，表明在线性运算下无冗余，不能互相表示，缺一不可；2) 其余向量均可由其线性表示，表明无缺失，具有代表性，是其中的“骨干”。

三个概念对应向量组、方程组和向量空间三个不同对象，但其本质都是描述和揭示对象的线性结构。基础解系即为方程组解空间的基，向量空间的基即为几何中坐标系的抽象，这易使学生理解几何中为什么用两个坐标轴描述平面，用三个坐标轴描述空间。这就将不同概念通过相同的本质联系起来，以统一的观点来描述它们的实质。这样的归纳总结可以帮助学生深入理解抽象的概念，同时启发学生探究不同概念和结论之间的联系，培养归纳总结的能力。

再比如“概率论与数理统计”课程中对随机

变量的教学,教师可引导学生对离散和连续随机变量从可能取值、性质、分布函数和取值特点四个方面进行总结比较,让学生通过思考以后填写表1的内容。

表1 离散随机变量和连续随机变量的比较
Tab.1 Comparison between discrete random variable and continuous random variable

比较项目	离散随机变量	连续随机变量
可能取值	数轴上离散的点	连续变动的点
性质	$p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$	$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
分布函数	$F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$, 单调不减右连续的阶梯函数, 在 x_k 处有间断	$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, 单调不减的连续函数
取值特点	$\forall a \in R, P\{X=a\}$ 未必为零	$\forall a \in R, P\{X=a\} = 0$

离散随机变量较为直观和容易理解,同时也更能体现概率分布的思想性,即随机变量以不同的概率分布在所有可能的取值上。而连续随机变量可以看作是借助微积分对离散情形的推广。通过让学生对二者进行多方面的总结比较,可以帮助学生通过离散来理解连续情形,同时培养学生归纳总结的能力。在对一维随机变量学习的基础上,教师可以引导学生思考二维情形的联合分布函数、联合分布律以及联合概率密度的形式,而从二维到多维的情形学生则可以很自然地完成。这种在教学中使用的归纳和推广的方法,充分体现了人们对世界的认知规律和提出并发展相应理论的过程,既能促进学生学习效果的提升,又可以很好地帮助学生在提高归纳总结和推广能力。

五、结束语

数学教育在大学生的基本素质和能力培养方面发挥着不可替代的作用。时代的进步与科技的发展对大学数学教育提出了更高的要求,在传授数学知识的同时,重视学生综合素质和能力的培养,是时代发展的需要。数学教学中应注重学生哪些能力的培养以及如何培养,是大学数学教育的一项重要课题,以上仅列举了四个重要方面。知识可能会过时,但在学习过程中培养起来的学习能力却是终身受用的。总而言之,教师应设计和运用恰当的教学

方法和形式,努力让学生爱学数学、爱用数学,激发学生的思想活力和创造力,以培养适应时代发展的复合型人才。

参考文献:

[1] 李大潜. 关于高校数学教学改革的一些宏观思考[J]. 中国大学教学, 2010(1): 7-9.

[2] 王娟. 基于过程性考核的对分课堂教学模式的探索与实践——以高等数学课程为例[J]. 上海理工大学学报(社会科学版), 2018, 40(3): 278-282.

[3] 余旭洪, 金露莎, 李珊. 培养大学生数学应用能力的教学改革思路[J]. 上海理工大学学报(社会科学版), 2019, 41(3): 282-286.

[4] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 7版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[5] 叶慈南, 刘锡平. 概率论与数理统计[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[6] 李大潜. 数学建模与素质教育[J]. 中国大学教学, 2002(10): 41-43.

[7] 陈绍刚, 黄廷祝, 黄家琳. 大学数学教学过程中数学建模意识与方法的培养[J]. 中国大学教学, 2010(12): 44-46.

[8] 张卫国, 孙宇娇. 工科数学教学中学生创新能力培养的研究与实践[J]. 上海理工大学学报(社会科学版), 2016, 38(2): 175-178.

[9] 刘锡平, 宇振盛, 何常香, 等. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

(编辑: 程爱婕)